6η Άσκηση

2022-2023

Έως την συνέχεια συνάρτησης

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x + x & , x \le \pi \\ \dfrac{x+\alpha\sigma\upsilon\nu\dfrac{x}{2}-\pi}{x-\pi} & , x>\pi \end{cases}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2-2\pi$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x^{\frac{f(x)}{\ln(\eta\mu x)}} & , x>0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο μηδέν.

Δίνεται και η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $(0,1)$ και ισχύει $h^3(x)+h(x)=x^3-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $-|x^3-x| \le h(x) \le |x^3-x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το πρόσημο της h.

ε) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $b(x)=\begin{cases} f(x) , x\le 0 \\ h(x) , 0<x<1 \\ x-1 , x\ge 1 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$.

στ) Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\varphi(f(x))=f(x)+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με την f να είναι γνησίως φθίνουσα στο $(\pi,\pi+1)$.
Να δείξετε ότι η φ είναι συνεχής στο $(\pi,\pi+1)$.

Νίκος Τούντας

Λύση

α) $f(x)=\begin{cases} ημx+x & , x\le π \\ \dfrac{x+ασυν\dfrac{x}{2}-π}{x-π} & , x>π \end{cases}$

Για να είναι συνεχής πρέπει $\lim\limits_{x\to π^-} f(x)=\lim\limits_{x\to π^+} f(x)=f(π) \Leftrightarrow π=\lim\limits_{x\to π^+} f(x)=π \Rightarrow \lim\limits_{x\to π^+} f(x)=π$.

$$\lim_{x\to π^+} f(x)=\lim_{x\to π^+}\frac{x+ασυν\frac{x}{2}-π}{x-π}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to π^+}\frac{x+αημ\left(\frac{π}{2}-\frac{x}{2}\right)-π}{x-π}=\lim_{x\to π^+}\left(\frac{x-π}{x-π}+\frac{αημ\left(\frac{π}{2}-\frac{x}{2}\right)}{x-π}\right)=$$

$$=\lim_{x\to π^+}\left(1+\frac{αημ\left(\frac{π}{2}-\frac{x}{2}\right)}{x-π}\right)=1-\frac{α}{2} \quad \text{γιατί} \quad \lim_{x\to π}\frac{αημ\left(\frac{π}{2}-\frac{x}{2}\right)}{x-π}\underset{u\to 0}{\overset{\frac{π}{2}-\frac{x}{2}=u}{=}}\lim_{u\to 0}\frac{αημu}{-2u}=\lim_{u\to 0}\left(-\frac{α}{2}\frac{ημu}{u}\right)=-\frac{α}{2}$$

Άρα πρέπει $1-\dfrac{α}{2}=π \Leftrightarrow 2-α=2π \Leftrightarrow α=2-2π$

β) $g(x)=\begin{cases} x^{\frac{f(x)}{\ln(ημx)}} & , x>0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$

Για $x>0$: $g(x)=x^{\frac{f(x)}{\ln(ημx)}}=e^{\ln\left(x^{\frac{f(x)}{\ln(ημx)}}\right)}=e^{f(x)\frac{\ln x}{\ln(ημx)}}$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(ημx)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln(ημx)-\ln x+\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\ln\left(\frac{ημx}{x}\right)+\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\ln x}{\ln x}}{\frac{\ln\left(\frac{ημx}{x}\right)}{\ln x}+\frac{\ln x}{\ln x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{ημx}{x}\right)+1}=1$$

Γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\left(\dfrac{ημx}{x}\right)\underset{u\to 1}{\overset{\frac{ημx}{x}=u}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{\ln x}=0$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f είναι συνεχής και στο μηδέν και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\dfrac{\ln x}{\ln(ημx)}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{f(x)\frac{\ln x}{\ln(ημx)}}\underset{u\to 0}{\overset{f(x)\frac{\ln x}{\ln(ημx)}=u}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+} e^u=e^0=1=g(0)$

Άρα η g είναι συνεχής στο μηδέν.

Σχόλιο: Με τον κανόνα του DLH που είναι πιο κάτω στην ύλη το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(ημx)}$ υπολογίζεται πιο εύκολα. Έχουμε $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln(ημx)}\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{συνx}{ημx}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{ημx}{xσυνx}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{ημx}{x}\cdot\dfrac{1}{συνx}\right)=1\cdot\dfrac{1}{1}=1$.

γ) $h^3(x)+h(x)=x^3-x \Leftrightarrow h(x)\left(h^2(x)+1\right)=x^3-x \Leftrightarrow h(x)=\dfrac{x^3-x}{h^2(x)+1}$, $x\in\mathbb{R}$ αφού $h^2(x)+1>0$

$$|h(x)|=\left|\frac{x^3-x}{h^2(x)+1}\right|=\frac{|x^3-x|}{|h^2(x)+1|}=\frac{|x^3-x|}{h^2(x)+1}\le|x^3-x| \Leftrightarrow -|x^3-x|\le h(x)\le|x^3-x| \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

δ) Είναι $h(x)=\dfrac{x^3-x}{h^2(x)+1}$ και το πρόσημό της εξαρτάται από το πρόσημο του αριθμητή γιατί $h^2(x)+1>0$.

$x^3-x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$ ή $x=1$

Στον διπλανό πίνακα φαίνεται το πρόσημο της h.

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

ε) Έχουμε $\lim\limits_{x\to0^+}\left(-|x^3-x|\right)=0=\lim\limits_{x\to0^+}|x^3-x|$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=0$ και επίσης $\lim\limits_{x\to1^-}\left(-|x^3-x|\right)=0=\lim\limits_{x\to1^-}|x^3-x|$ άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=0$.

Στο $(0,1)$ είναι $b(x)=h(x)$ συνεχής. Ισχύει $b(0)=f(0)=0$ και $b(1)=1-1=0$ άρα έχουμε:
$\lim\limits_{x\to0^+}b(x)=\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=0=b(0)$ και $\lim\limits_{x\to1^-}b(x)=\lim\limits_{x\to1^-}h(x)=0=b(1)$ επομένως η b είναι συνεχής στο $[0,1]$.

στ) $f(\varphi(x))=\varphi(x)+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και έστω τυχαίο $xo\in(\pi,\pi+1)$

Για $\pi<x<xo<\pi+1 \overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow} \varphi(x)<\varphi(xo) \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(\varphi(x))>f(\varphi(xo)) \Leftrightarrow \varphi(x)+x>\varphi(xo)+xo \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \varphi(x)-\varphi(xo)>xo-x \Rightarrow 0>\varphi(x)-\varphi(xo)>xo-x$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to xo^-}(xo-x)=0=\lim\limits_{x\to xo^-}0$ άρα $\lim\limits_{x\to xo^-}\left[\varphi(x)-\varphi(xo)\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to xo^-}\varphi(x)=\varphi(xo)$

Για $\pi+1>x>xo>\pi \overset{\varphi\nearrow}{\Rightarrow} \varphi(x)>\varphi(xo) \overset{f\searrow}{\Rightarrow} f(\varphi(x))<f(\varphi(xo)) \Leftrightarrow \varphi(x)+x<\varphi(xo)+xo \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \varphi(x)-\varphi(xo)<xo-x \Rightarrow 0<\varphi(x)-\varphi(xo)<xo-x$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to xo^+}(xo-x)=0=\lim\limits_{x\to xo^+}0$ άρα $\lim\limits_{x\to xo^+}\left[\varphi(x)-\varphi(xo)\right]=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to xo^+}\varphi(x)=\varphi(xo)$

Άρα για το τυχαίο $xo\in(\pi,\pi+1)$ ισχύει $\lim\limits_{x\to xo}\varphi(x)=\varphi(xo)$ άρα η φ είναι συνεχής στο $(\pi,\pi+1)$